

Análise Combinatória: É o ramo da matemática que estuda a contagem, utilizando estruturas algébricas.

Princípio Fundamental da Contagem – PFC ou Princípio Multiplicativo.

Quando uma ação é constituída de duas etapas sucessivas, a 1ª etapa pode ser realizada de x maneiras distintas (diferentes). Para cada uma dessas possibilidades, a 2ª etapa pode ser realizada de y maneiras distintas. Então, o número de possibilidades de se efetuar a ação completa é dado pela multiplicação de x por y ($x \cdot y$). Esse princípio pode ser generalizado para ações compostas de mais de duas etapas.

Exemplos:

- 1) de quantas maneiras distintas (diferentes) pode uma pessoa subir até o último andar de um prédio, havendo **3** portas de entrada e **4** elevadores?
- 2) Num restaurante há 2 tipos de saladas, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quantas possibilidades temos para fazer uma refeição composta de uma salada, um prato quente e uma sobremesa?
- 3) Em um campeonato de futebol participam 8 times. De quantos modos podemos ter os 2 primeiros colocados?
- 4) Quantos números naturais de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
- 5) Quantos números naturais de 3 algarismos **distintos** (diferentes, não podemos repetir algarismos) podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
- 6) Quantos números naturais pares de 4 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
- 7) Quantos números naturais pares de 4 algarismos **distintos** podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
- 8) Usando os algarismos 0; 2; 4 e 6, responda:
 - a) quantos números de 3 algarismos podemos formar?
 - b) quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

Respostas: 1)12 2)18 3)56 4)343 5)210 6)1029 7)360 8)a)48 b)18

Exercícios da aula:

1. Existem 3 estradas ligando a cidade A à cidade B, e 4 estradas ligando B a C. De quantos modos uma pessoa pode viajar de A para C, passando por B?
2. Um homem possui 7 ternos, 5 camisas e 3 pares de sapatos. De quantos modos ele pode escolher um terno, uma camisa e um par de sapatos?
3. Em um campeonato de futebol participam 8 times. De quantos modos podemos ter os 3 primeiros colocados?
4. Quantos números naturais de 2 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
5. Quantos números naturais de 2 algarismos **distintos** podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
6. Quantos números naturais ímpares de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
7. Quantos números naturais ímpares de 3 algarismos **distintos** podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
8. No Brasil, as placas dos automóveis eram formadas por três letras, das 26 letras do nosso alfabeto (de A a Z), seguidas de quatro algarismos do nosso sistema decimal (de 0 a 9), podendo haver repetição de letras e de algarismos. Como por exemplo ANA – 1987. Qual o número máximo de veículos que era possível de se emplacar neste sistema?
9. As novas placas do padrão Mercosul para automóveis, inverteram a quantidade de letras e de números, elas possuem quatro letras e três algarismos. Como por exemplo I T A X 5 2. Quantos veículos podem ser emplacados neste sistema?

Respostas: 1)12 2)105 3)336 4)49 5)42 6)196 7)120 8)175.760.000 9)456.976.000

Fatorial (!): na matemática, o fatorial de um número natural n , representado por $n!$, é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n .

Por definição temos:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

Por recorrência a definição, temos:

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

E assim sucessivamente.

Exemplos:

1. Calcule: a) $4! + 3!$ b) $7!$ c) $2! \cdot 4!$ d) $(2 \cdot 4)!$ e) $\frac{6!}{3!}$ f) $\frac{3!}{6!}$ g) $(3!)^2$

2. Resolva: a) $\frac{10!}{2! \cdot 8!}$ b) $\frac{8!+7!}{7!}$ c) $\frac{10!+11!+12!}{12!}$

3. Simplifique: $\frac{(n+1)!-n!}{n!}$

Respostas: 1) a) 30 b) 5.040 c) 48 d) 40.320 e) 120 f) 1/120 g) 36 2) a) 45 b) 9 c) 12/11 3) n

Exercícios da aula:

1. Calcule: a) $\frac{7!}{4!}$ b) $\frac{4!}{7!}$ c) $\frac{4!6!}{3!5!}$ d) $\frac{3!5!}{4!6!}$ e) $\frac{12!+13!}{10!}$ f) $\frac{12!}{10!+9!}$

2. Simplifique: a) $\frac{n!}{(n-2)!}$ b) $\frac{(n+1)!}{(n+2)!}$ c) $\frac{(n+3)!}{(n-2)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n+2)!}$

Respostas: 1) a) 210 b) 1/210 c) 24 d) 1/24 e) 1848 f) 120 2) a) $n^2 - n$ b) $1/(n+2)$ c) $n^2 + 2n - 3$.

PERMUTAÇÃO

Permutar é sinônimo de embaralhar, de trocar objetos de posição. Um exemplo simples está relacionado aos anagramas, que são palavras formadas com as mesmas letras de uma palavra dada, podendo ter ou não significado na linguagem comum. Por exemplo, AVON é um anagrama da palavra NOVA. HOTEL LETOH (em Mococa), transportadora RIAD o nome do proprietário é DAIR.

Permutação simples: o número de permutações de n elementos distintos é dado por:

$$P_n = n!$$

Exemplos:

1) Quantos anagramas tem a palavra PAI?

Pelo PFC: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

ou

Por Permutação: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

2) Considere todos os anagramas da palavra PALMITO.

a) Quantos anagramas começam com a letra P?

O P está fixo na primeira posição e nos sobram 6 letras distintas, para permutá-las:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

b) Quantos anagramas terminam pelas letras I, T, O, juntas, e nessa ordem?

Colocando ITO fixo, nas 3 últimas posições, resta-nos permutar as outras 4 letras, $P_4 = 4! = 24$.

c) Quantos anagramas possuem as letras I, T, O juntas?

O bloco ITO permuta com as outras 4 letras, P_5 , mas, as letras I, T, O também permutam dentro do bloco, P_3 , logo, $5! \cdot 3!$

3. Seis amigos vão ao cinema e devem ocupar as seis poltronas contíguas (consecutivas) de uma determinada fileira. Entre eles há o casal Daniel e Adriana.

a) De quantos modos eles podem ocupar os seis lugares, sabendo que Daniel e Adriana devem ficar juntos?

Devemos considerar Daniel e Adriana como uma só pessoa e permutar o bloco formado por eles com as 4 pessoas restantes e, também, trocar a ordem dos dois dentro do bloco.

b) De quantos modos eles podem ocupar os seis lugares, de modo que Daniel e Adriana, que estão brigados, não fiquem juntos em hipótese nenhuma?

Calculamos o número de permutações possíveis com as 6 pessoas e descontamos aquelas em que Daniel e Adriana estão juntos.

4. Considere os anagramas formados com as letras da palavra PEDRO. Em quantos anagramas temos a letra E antes da letra O (não necessariamente juntas)?

Com as letras da palavra PEDRO temos $5! = 120$ anagramas. Se pensarmos nas posições das letras E e O, ou E vem antes de O ou O vem antes de E. Assim, exatamente a metade deles tem E antes de O, pois a outra metade tem O antes de E. Logo, 60.

5. Considere os anagramas formados com as letras da palavra PEDRO. Em quantos anagramas temos a letra D antes da letra R sempre juntas?

Resposta: Em 24. Como DR está junto e nessa ordem, é um bloco só que permuta com as outras 3 letras, formando 24 anagramas.

Exercícios da aula:

1. Considere todos os anagramas da palavra PENSADOR.

a) Quantos anagramas podemos formar?

b) Quantos anagramas começam pela letra P?

c) Quantos anagramas começam pelas letras P, E, N, juntas, e nessa ordem? *DICA: Colocando PEN fixo, nas 3 primeiras posições, resta-nos permutar as outras 5 letras.*

d) Quantos anagramas possuem as letras P, E, N, juntas, e nessa ordem? *DICA: A sequência PEN funciona agora como um só elemento. Assim, devemos permutar o bloco formado por PEN com as letras restantes S, A, D, O, R. Ou seja, PEN + 5 letras.*

e) Quantos anagramas possuem as letras P, E, N juntas? *DICA: Observe que, para cada sequência formada pelas letras P, E, N (como, por exemplo, no item anterior), temos $P_6 = 6!$. Mas, as letras P, E, N também se permutam de $P_3 = 3!$ Maneiras.*

f) Quantos anagramas começam por vogal? *DICA: Temos 3 possibilidades para a vogal na primeira posição, restando permutar as 7 letras restantes entre si.*

g) Quantos anagramas terminam por consoante? *DICA: Temos 5 possibilidades para a consoante na última posição e, depois, permutamos as 7 letras restantes.*

h) Quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante? *DICA: Temos 3 possibilidades de vogais na primeira posição e 5 possibilidades de consoantes para a última posição, restando permutar as 6 letras restantes.*

2. Uma empresa vai promover uma reunião de seus diretores e gerentes com os acionistas. Uma mesa é preparada para acomodar seus 3 diretores e 4 gerentes, de modo que as 7 pessoas fiquem uma ao lado da outra. De quantos modos é possível essa acomodação, se os diretores devem ocupar os três lugares centrais? *DICA: basta permutar 3 diretores e 4 gerentes, ou seja, $3! \cdot 4!$. Também é possível resolver usando o PFC.*

3. Quantos anagramas formados com as letras da palavra FLAVIO possuem vogais e consoantes alternadas? *DICA: A palavra FLAVIO tem 3 vogais e 3 consoantes, para as 6 posições temos, 3 vogais x 3 consoantes x 2 vogais x 2 consoantes x 1 vogal x 1 consoante = 36 possibilidades começando por vogal, mas também pode começar por consoante, então vezes 2.*

4. Seis amigos vão ao cinema e devem ocupar as seis poltronas contíguas (consecutivas) de uma determinada fileira. Entre eles há o casal Daniel e Adriana.

a) De quantos modos eles podem ocupar os seis lugares, sabendo que Daniel e Adriana devem ficar juntos? *DICA: Devemos considerar Daniel e Adriana como uma só pessoa e permutar o bloco formado por eles com as 4 pessoas restantes e, também, trocar a ordem dos dois dentro do bloco.*

b) De quantos modos eles podem ocupar os seis lugares, de modo que Daniel e Adriana, que estão brigados, não fiquem juntos em hipótese nenhuma? *DICA: Calculamos o número de permutações possíveis com as 6 pessoas e descontamos aquelas em que Daniel e Adriana estão juntos.*

5. Cinco pessoas, entre elas Fred e Fabiano, vão posar para uma fotografia. De quantas maneiras elas podem ficar dispostas se Fred e Fabiano recusam-se a ficar lado a lado?

6. Considere as permutações formadas com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Colocando-se os números assim obtidos em ordem crescente, qual a posição ocupada pelo número 32.415? *DICA: Calcule separadamente, quantas permutações são possíveis, até chegar ao número 32.415.*

7. Considere os anagramas formados com as letras da palavra PEDRO. Em quantos anagramas temos a letra E antes da letra O (não necessariamente juntas)? *DICA: Com as letras da palavra PEDRO temos $5! = 120$ anagramas. Se pensarmos nas posições das letras E e O, ou E vem antes de O ou O vem antes de E. Assim, exatamente a metade deles tem E antes de O, pois a outra metade tem O antes de E.*

8. Considere os anagramas formados com as letras da palavra PEDRO. Em quantos anagramas temos a letra D antes da letra R sempre juntas? *DICA: Como DR está junto e nessa ordem, é um bloco só que permuta com as outras 3 letras, formando 24 anagramas.*

Repostas: 1)a) $8! = 40.320$ b) $7! = 5.040$ c) $5! = 120$ d) $6! = 720$ e) 4.320 f) $3 \cdot 7! = 15.120$ g) $7! \cdot 5 = 25.200$ h) $3 \cdot 6! \cdot 5 = 10.800$ 2)144 3)72 4)a)240 b)480 5)72 6)57ª 7)60 8)24

Permutação com repetição: vejamos agora quantas permutações podemos formar com elementos entre os quais há repetições.

Exemplos:

1) Com as letras da palavra ANA é possível formar quantos anagramas?

Com as letras A, A e N há três permutações apenas: (A, A, N); (A, N, A) e (N, A, A). Já sabíamos que o número de permutações de três elementos distintos é $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Agora vemos que, se entre os 3 elementos tivermos 2 repetidos, esse número fica dividido por 2! (são os dois As que se repetem). Indicamos o número de permutações de 3 elementos sendo 2 repetidos por P_3^2 e calculamos da seguinte maneira:

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

2) Quantos são os anagramas da palavra BATATA?

Se os “As” fossem diferentes e os “Ts” também, teríamos as letras B, A₁, A₂, A₃, T₁, T₂ e o total de anagramas seria $P_6 = 6! = 720$. Mas, as permutações entre os 3 “As” não produzirão novo anagrama. Então precisamos dividir P_6 por P_3 . O mesmo ocorre com os dois “Ts”, ou seja, precisamos dividir também por P_2 . Portanto, o número de anagramas da palavra BATATA é:

$$P_6^{3,2} = \frac{P_6}{P_3 \cdot P_2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = \frac{120}{2} = 60$$

Exercícios da aula:

1. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ARARA?

2. Considere as letras da palavra ARRASADO. Quantos anagramas começam pela sílaba RA? *DICA: A palavra tem 8 letras, 3 iguais a A e 2 iguais a R. Colocando R na primeira posição e A na segunda, resta-nos permutar 6 letras, em que temos 2 letras iguais a A e um único R.*

3. Quantos números naturais ímpares de 5 algarismos podemos escrever com os dígitos 1, 1, 2, 2 e 3, respeitadas as repetições apresentadas? *DICA: Calcule separadamente, colocando primeiro o 1 na última casa e depois o 3 na última casa.*

4. Uma palavra tem 8 letras, sendo que uma delas comparece n vezes, e as outras não se repetem. Determine n , sabendo que o número de anagramas possíveis de serem formados com as letras dessa palavra é igual a 336. *DICA: Do enunciado $P_8^n = 336$*

5. Considere os anagramas formados com as letras da palavra RICHARD. Em quantos anagramas temos a letra A antes da letra I (não necessariamente juntas)? *DICA: Observe que há repetição do erre. E se pensarmos nas posições das letras A e I, ou A vem antes de I ou I vem antes de A. Assim, exatamente a metade deles tem A antes de I, pois a outra metade tem I antes de A.*

Respostas: 1)10 2)360 3)18 4) $n = 5$ 5)1260 anagramas.

COMBINAÇÃO

Em combinação, a ordem não é importante, por exemplo, o grupo de alunas Andréia, Bruna e Cássia é igual ao grupo Cássia, Bruna e Andréia.

Combinações Simples: Uma combinação simples de n elementos tomados k a k é dado por:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplos:

1) Com os 40 alunos de uma classe, de quantos modos podemos formar um grupo com 5 alunos?

Resposta: 658.008

2) calcular o número de combinações possíveis para o sorteio da Mega-Sena.

Para calcular as probabilidades em loterias, tem que se usar a fórmula das combinações, pois não importa a ordem que os números são sorteados. Para acertar as 6 dezenas da Mega-Sena no universo {1; 2; 3; ...; 58; 59; 60}, temos:

$$C_{60,6} = \binom{60}{6} = \frac{60!}{6!(60-6)!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54!}{720 \cdot 54!} = \frac{36045979200}{720} = 50.063.860$$

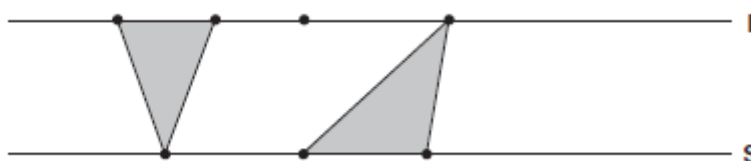
3) A diretoria de um centro acadêmico de uma faculdade é constituída por 5 estudantes do sexo masculino e 3 do sexo feminino. Determine quantas comissões de 5 desses estudantes podem ser formadas de modo que cada uma tenha 3 rapazes e 2 moças. **Resposta: 30**

4) Um químico dispõe de 10 tipos de substâncias. De quantas maneiras ele poderá associar 4 dessas substâncias de modo que uma determinada substância sempre esteja na escolha efetuada? **Resposta: 84**

5) Em um encontro de amigos todos trocaram cumprimentos com apertos de mão. Sabendo que aconteceram 66 apertos de mão, quantas pessoas se encontraram? **Resposta: 12**

6) De quantos modos podemos separar 10 pessoas em dois grupos, um de 7 pessoas e o outro de 3 pessoas? **Resposta: 120**

7) Qual é o número de triângulos que podemos formar com 7 pontos distintos, 4 sobre uma reta e 3 sobre outra reta paralela à primeira? **Resposta: 30**



Exercícios da aula:

1. Com os 40 alunos de uma classe, de quantos modos podemos formar um grupo com 4 alunos?

2. Calcule: $C_{7,3} + C_{3,3} - C_{4,0}$.

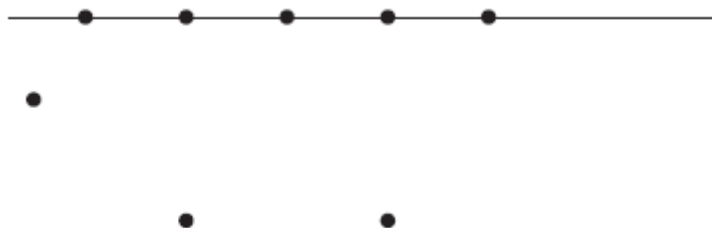
3. Em uma sala de aula existem 12 alunas, onde uma delas chama-se Carla, e 8 alunos, onde um deles atende pelo nome de Luiz. Deseja-se formar comissões de 5 alunas e 4 alunos. Determine o número de comissões, onde simultaneamente participam Carla e Luiz.

4. Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando-se que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis que esse time pode ser formado.

5. No jogo de basquetebol, cada time entra em quadra com cinco jogadores. Considerando-se que um time para disputar um campeonato necessita de pelo menos 12 jogadores, e que desses, 2 são titulares absolutos, determine o número de equipes que o técnico poderá formar com o restante dos jogadores, sendo que eles atuam em qualquer posição.

6. Ao sair de uma festa, 13 amigos se despediram com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram trocados?

7. São dados 8 pontos em um plano, sendo que não existem 3 quaisquer alinhados, com exceção de 5 deles que estão em uma mesma reta (figura a seguir). Quantas retas esses pontos determinam?



Respostas: 1)91.390 2)35 3)11.550 4)661.500 5)120 6)78 7)19